О ПИФАГОРЕЙСКОЙ СИСТЕМЕ МУЗЫКАЛЬНЫХ ТОНОВ (очерк)

(*Первоначальная версия публикации 1989-90 гг. Текст прочитан в качестве доклада на научной коференции НИО ЛГИТМиК в марте 1987 г. Первая попытка, открывшая путь к формулировке и генерализации уравнения пифагоровой системы*.)

Посвящается А.Волохонскому

Прямым следствием длительности существования пифагорейской теории музыкальных тонов является её крайняя завуалированность. Адаптируясь в более поздних теориях, она оказывалась всё более опосредованной неадекватными терминами, либо привлекалась к объяснению фактов, не входивших в сферу интересов древнегреческой музыки, что также вызвало появление несистематической терминологии, а с ней и некоторой путаницы. Поэтому задача изложения пифагорейской теории ставит популяризатора в трудное положение. С одной стороны, источники, хотя и обильны, но либо не во всём полны, либо не во всём точны, главное же - пестры в терминологическом составе. Сведение воедино всего этого разноречия потребовало бы непомерного труда. С другой стороны, будучи логически стройной м орпирающейся на фундаментальные факты, эта теория может быть как бы развёрнута заново. В какой то мере жертвуя академическими обычаями, такой подход выигрывает в цельности видения существа теории, в возможности более чёткого осознания ограниченности её диатонического лексикона, в реституции логико-математической подоплёки музыкальной орфографии.

Вряд ли можно археологически точно реконструировать теорию, разработанную самим Пифагором. Из того немногого, что дошло до нас, едва ли существует хоть что-то, о чём можно полагать как о принадлежащем самому Пифагору, а не приписанном ему молвой. К тому же известны идентичные доктрины, разработка которых никак не связана с Пифагором. Наконец, пифагорейская теория в нынешнем своём состоянии весьма выходит за пределы того, что могло составлять сферу интересов Пифагора. Вот почему предлагаемый вниманию читателя очерк не претендует быть аутентичным изложением, хотя основывается на аутентичных принципах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ. Пифагорейскими называются звукоряды, интервалы которых представимы отношениями целочисленных степеней чисел 2 и 3. Степени могут быть нулём, положительными и отрицательными числами. Принято определять пифагорейские звукоряды как образованные по чистым квинтам. Между тем такое определение некорректно, поскольку квинтой этот интервал становится в диатоническом звукоряде, тогда как пифагорейская теория приложима к разным звукорядам (к примеру, пятая ступень петатоники образует иной интервал, чем пятая ступень диатоники).

Основываясь на немногих простых положения, справедливость которых самоочевидна, Евклид создал теорию пространства, любое утверждение которой может быть через них доказано или опровергнуто. Используя три исходных числа - 1, 2, 3 - пифагрейская теория звуков (т.е. явлений временнóй природы) в такой же мере способна контролировать свои утверждения. Как и подобает физико-математической дисциплине, пифагорейская теория опирается на опыт ощущения звуков, обосновывая и систематизируя связанные с таковым представления. В свою очередь, справедливость её утверждений - сколь бы странными ни казались иные из них - допускает проверку слуховым опытом. С этой точки зрения теория оказалось настолько удачной, что поныне остаётся первоосновой любых систем музыкальных тонов.

Самоочевидность евклидовых постулатов означает их согласие с нашей интуицией свойств пространства. По-видимому эта интуиция более разнообразна и полна, чем интуиция чисел - большинство людей испытывают трудности, как только выходят за пределы чисто арифметического. Между тем пифагорейские идеи о числе как гармонии выходят далеко за эти пределы. Вот почему исходные понятия требуют пояснений.

Число 1 - принцип порядка как такового. Единица является интервальным числом примы и свёртывает м множество натуральных гармоник тона. Определённость музыкального тона есть единство. Система тонов - тоже единство. И сама музыка - единство, организующее звуковой хоас в стройный порядок.

Число 2 - принцип сохранения порядка. Двока является интервальным числом диатонической октавы и занимает второе место в ряду натуральных гармоник звукового спектра. Сохранение самоопределённости, за которое ответственно число 2, можно иллюстрировать примером октавных переносов, меняющих высотное положение тона, но сохраняющих его наименование.

Число 3 - принцип порождения порядка. Тройка является интервальным числом диатонической дуодецимы и занимает третье место в ряду натуральных гармоник звукового спектра. Порождение порядка, за которое ответственно число 3, можно иллюстрировать примером квинтого круга, никогда не приходящего на ранее полученные тоны, но удерживающего всё их множество в единстве отношений.

Наивно полагать, что выбор этих чисел произволен. Связь единицы, двойки и тройки с естественным упорядочиванием тонов лдегко поддаётся установлению даже на той ранней стадии человеческой деятельности, когда таковая лишь начинает опираться на измерения и счёт. Математическая подоплёка звукоряда напоминает проблемы хронологии и это сходство питает уверенность в том, что музыкальные теории появились одновременно с ранними календарями. Их аналогия помогает понять, что выбор единицы, двойки и тройки для определения звукоряда не более произволен, чем выбор числа 365 для определения числа дней года.

Всякий любознательный субъект, наделённый арифметической интуицией, способен установить, что если подуть известным образом в трубку (напр. трубчатый стебель растения, или длинную полую кость), то образуется тон, при усилении дутья перескакивающий на более высокий звук. Если подуть ещё сильнее, произойдёт второй перескок. Та же трубка, укороченная вдвое, издаст звук первого перескока, треть той же трубки - звук второго перескока, что раскрывает музыкальный смысл отношения 1:2:3. И если древнекитайская система Люй возникла вне всякой связи с Пифагором, то в этом нет ничего невозможного. Древнегреческо-древнекитайская конвергенция вполне вероятна, поскольку исходные факты пифагорейской теории имеют мало общего с тайнами универсума.

ЕДИНИЦА. ГАРМОНИКИ. ОТНОШЕНИЕ СИНТЕЗА. Единица порождает все числа, а всё множество чисел свёртывается и успокаивается в единице. Это известное пифагорейское положение проявляется в мире звука следующим образом: спектр музыкального тона составлен гармониками (обертонами), частоты которых относятся как числа натурального рада. Изучение слухового восприятия убеждает, что высотная определённость звука зависит от наличия и выраженности (амплитуд) гармоник. Отклонение какой либо из гармоник (особенно нижних) от целочисленного значения заметно уменьшает высотную определённость звука.

Примерм свёртывания чисел в единицу служат знакомые всякому инструменталисту "тоны Тартини" - если на двух инструментах взят чистый интервал, то отчётливо слышен призвук, являющийся басом взятых тонов. Это явление издавна используется в конструировании инструментов (напр., диспозиция органа с её аликвотными регистрами).

Так выглядит первое важнейшее отношение между музыкальными звуками, которое можно назвать **отношением синтеза**. Звуки пребывают в названном отношени, если их частоты относятся между собой как целые числа. В восприятии такие звуки сливаются, теряя свою иднивидуальность ради утверждения единства, воздействующего как **тональная определённость единицы** (т.е. первой гармоники, результирующей вориятие тона).

Гармоники более высоких номеров индивидуальны хотя бы в том смысле, что их числа иные, чем единица, и каждое из них иное, чем прочие. Каждая гармоника потенциально содержит собственный спектр и в этом смысле её индивидуальность может быть названа **тональной определённостью числа**. Однако актуальные гармоники свёрнуты в единицу. Поэтому (потенциальная) тональная определённость чисел не прекращает (актуального) отношения синтеза.

ДВОЙКА. ОКТАВНЫЕ ПЕРЕНОСЫ. По известному пифагорейскому положению двойка является ближайшим к единице числом и, будучи первым различием и неравенством, одновременно является наименьшим различием и неравенством, ближайшим образом соотносясь с единицей по происхождени. В свой сущности двойка вполощает рождение, которое есть не что иное, как повторение единства. Так живая клетка размножается делением на две дочерних клетки, в точности её повторяющих. В ещё более изящной форме принцип удвоения в сочетании со свёртыванием двойки в единицу дан в гаметогенезе (образовании половых клеток, соединяющихся по две в оплодотворении). Подобно размножению живого, повторяющего и тем сохраняющего себя в потомстве, всё, что производит в пироде своё ближайшее подобие, выражает эту сущность двойки.

В ближайшем подобии состоят и тоны, частоты которых относятся как 1:2. Ныне это отношение называют октавным (восьмёрочным), что верно лишь в диатоническом звукоряде. В пифагорейском лексиконе соответсвующая ступень звукоряда называлась "дапасон" (находящийся в точно таких же условиях), их отношение определяло одно из важнейших значений термина "гармония". Подобие тонов, частоты которых относятся как 1:2, таково, что более 70% людей с нетренированным слухом вообще не воспринимает их как разные.

Октавные переносы, т.е. умножение и деление частоты тона на 2, меняют всё, но нисколько не влияют на упомянутое подобие и тем отличаются от переносов на любые другие интевалы. Это важное обстоятельство позволяет выявить такие связи между тональными определённостями чисел, которые существенно отличаются от их отношений в ряду натуральных гармоник.

НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ. МОДАЛЬНОСТЬ. Если музыкальные тоны состояли только из гармоник, они различались бы лишь по высотной определённости и громкости. Звук, скажем, гобоя не отличался бы от звука скрипки, или трубы. Слух легко распознаёт источники звука, доже если они издают один и тот же тон. Такая возможность обеспечена существованием негармонических компонент спектра, относительные частоты которых не являются целыми числасми.

Тем самым природа звука обнаруживает второй важнейший вид отношения между тонами - множественность различий по воспринимаемому признаку или **модальность**. Модальности внеположны категорическим различиям, подразумевающим строгую бинарность оппозиций.

Отношение модальности выявляется сопоставлением тональных определённостей чисел. Множество целых чисел порождает дробные отношения, влекущие соподчинённость некоторых различий. Из этого следует модальности, сспецифизированные соподчинённостью форм отношения данных чисел.

Рассмотрим поясняющий пример. Тоны, частоты которых относятся как 1:9, находятся в отношениии синтеза - определённость их раздельного существования остаётся (особенно в спектре) незаметной для слуха. Если понизить верхний тон на октаву (т.е. изменить актуальный интервал, сохраняя тональную определённости числа 9), то получится интервал 1:9/2, приобретающий определённость секстдецимы, но мало поддающийся различению по консонантности-диссонантности. Новое октавное понижение даёт интервал 1:9/4 или нону с её определившейся диссонантностью. Ещё одно октавное понижение даёт интервал 1:9/8, т.е. большую секунду, максимально выявляющую диссонирование, специфизируемое тональной определённостью чисел 1 и 9.

Итак, величина интервала уменьшалась, а модальность менялась от индифферентной до весьма диссонатной. Иными словами, максимум тональной определённости числа выявляется в ситуации, называемой **тесным расположением**, при которой величина интервала И отвечает условию $1<И<2$.

Ясно, что при последовательном делении числа (не являющегося рациональной степенью двойки) на 2 имеется только один случай, отвечающий условию тесного расположения. Что же до целочисленных степеней двойки, то, будучи ближайшим подобием единицы, она способна зеркально перебразовывать тональные определённости прочих чисел, коль скоро сама является зеркально размноженной единицей.

ТРОЙКА. ПЕРВИЧНЫЙ РЯД. Единица в любой степени равна единице - прима развёртывается в степенной ряд. Двойка, размножая себя в степенном ряду, порождает октавные подобия. Первым самостоятельным числом является тройка, ибо её тональная определённость иная, чем у единицы, размножая же себя в степенном ряду, она порождает тональные определённости новых чисел. Будучи получены одной лишь тройкой, последние согласованы в гармонию, которая всякой из них назначает особую роль и всякую из этих ролей увязывает с прочими.

Итак, **порождающий** пифагорейский ряд развёртывается тройками, следуя степенной функции:

$$y=a\ 3^x. \qquad (1)$$

Число ступеней звукоряда не может быть дробным, следовательно x принимает лишь целочисленные значения. Коэффициент а выражает частоту тона, от которого начинается порождение. Если а=1, то

$$У=3^x. \qquad (1а)$$

При положительных x в этом случае порождется ряд, который принято называть восходящим:

3^0 3^1 3^2 3^3 3^4 3^5 3^6 и т.д.. что соответствует
1 3 9 27 81 243 729 и т.д.

При отрицательны x порождается ряд, называемый нисходящим:

3^0 3^{-1} 3^{-2} 3^{-3} 3^{-4} и т .д., что соответствует
1/1 1/3 1/9 1/27 1/81 и т.д.

Ясно, что (при а=1) $y=3^0$ является центром, по обе стороны которого простираются восходящая и нисходящая ветви ряда.

Порождающий ряд высотно определён настолько, что какое-то из неограниченного множества его чисел отстоит больше, чем на 3^0, но меньше, чем на 3^1, от любого наперёд заданного числа. Ясно также, что при этом максимальным удалением последнего от 3^0 и 3^1 является $3^{1/2}$. Иначе говоря, высотное положение порождающего ряда может расходиться само с собой не более, чем на корень из тройки, поскольку расхождения на 3^x дают совпадения с тем же рядом.

Ниже 3^1 или элементарный интервал порождающего ряда будет называться "троечным шагом", а выражение "номер позиции порождающего ряда" - означать число троечных шагов (x), требующихся для его получения.

РАЗВЁРТЫВАНИЕ В ТЕСНУЮ СТРУКТУРУ. Состоя из 3^x, порождающий ряд пребывает в отношении синтеза, является пассивной структурой. Выявление модальностей требует перевода его ступеней в тесное расположение. Как упоминалось, такой перевод осуществляется двоечными (октавными) переносами и, будучи осуществлённым для некоего определённого участка порождающего ряда, называется **развёртыванием в тесную структуру**.

Пифагоров звукоряд является развёртыванием в тесную структуру порождающего ряда, полученного шестью троечными шагами. Итог имеет следующий вид:

$3^0/2^0$ $3^2/2^3$ $3^4/2^6$ $3^6/2^9$ $3^1/2^1$ $3^3/2^4$ $3^5/2^7$, или
ч.I б.II б.III ув.IV ч.V б.VI б.VII.

Отметим, что последовательность номеров троечных шагов (x) в порождающем ряду изменилась - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 в тесной структуре преобразовалась в 0, 2, 4, 6, 1, 3, 5. Ценой этой перемены пассивность тональной определённости чисел порождающего ряда преобразовалась в модальность лидийского церковного лада. Посредством двоечных (октавных) повышений и понижений пифагоров звукоряд может быть неограниченно продолжен к басу или дисканту, что не меняет номеров троечных шагов. Они всегда будут повторениями последовательности 0, 2, 4, 6, 1, 3, 5. Из этого ясно, что существует всего семь способов отсчитать в этом порядке семь ступеней. Смотря по тому, от какой из них ведётся отсчёт, получается какой-то из семи церковных ладов (напр., 2, 4, 6, 1, 3, 5, 0 - миксолидийский лад, 4, 6, 1, 3, 5, 0, 2 - эолийский лад и т.д.) Они остаются таковыми в любом месте пифагорова звукоряда. Иначе говоря, октавные переносы не меняют ни состава ступеней, полученных шестью троечными шагами, ни порядка их номеров в тесной структуре.